Государственное автономное профессиональное
образовательное учреждение
Астраханской области
«Астраханский социально-педагогический колледж»

Справочное пособие по математике

Астрахань, 2017

Оглавление

Введение 3
Общие сведения 4
Раздел 1. Основы тригонометрии 5
Основные единица измерения угла 5
Определение тригонометрических функций 7
Таблица значений тригонометрических функций 8
Мнемоническое правило запоминания значений тригонометрических функций 9
Основные тригонометрические тождества 10
Формулы приведения 10
Правило применения формул приведения. 10
Мнемоническое правило для формул приведения 11
Формулы сложения 11
Формулы двойного угла 12
Формулы половинного аргумента 12
Формулы преобразования суммы в произведение 12
Формулы преобразования произведения в сумму 12
Графики тригонометрических функций. 13
Преобразование графиков тригонометрических функций 15
Немного из истории 17
Обратные тригонометрические функции 18
Решение простейших тригонометрических уравнений 19
Тригонометрические неравенства 20
Раздел 2. Показательная функция 23
Логарифмическая функция 30
Раздел 4. Производная функции 31
Геометрический смысл производной 33

Введение

Данное справочное пособие включает все основные разделы школьной программы по математике.

Книга содержит необходимые теоретические сведения и методы решения задач, иллюстрируемые подробно разобранными примерами. Упражнения для самостоятельного решения включают задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов. Приводятся ответы, указания или решения ко всем упражнениям.

Пособие адресовано учащимся старших классов, абитуриентам и учителям математики.

Общие сведения

При изложении основного материала содержащегося в этом пособии мы будем пользоваться следующими общепринятыми математическими обозначениями и формулами.

N - натуральные числа

Z - целые числа

Q - рациональные числа

R - действительные числа

$\notin$ - не принадлежность

$\in$ - принадлежность

$\approx$ - приблизительное равенство

∞ - бесконечность

$\Rightarrow$ - следование

$\Leftrightarrow$ - равносильность

Формулы сокращенного умножения

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
6. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
7. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Формулы решения квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac$ - формула дискриминанта

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ - формула корней

Формулы разложения квадратного трехчлена на линейные множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Формулы теоремы Виета

$x_1 + x_2 = -b$

$x_1 \cdot x_2 = c$

Глава 1. Основы тригонометрии

Тригонометрия имеет длительную историю и сегодня хорошие знания и прочные навыки по тригонометрии являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения математики, физики, ряда других дисциплин.

Основные единица измерения угла

К основным единицам измерения углов относят градусную и радианную меры. Градусный и радианный способ измерения углов равноправны и используются достаточно широко.

1 радиан – это центральный угол это центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Точное значение радиана выражается дробью $1рад = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0$.

Радианная и градусная меры связаны зависимостью 180° = π радиан.

Часто приходится переходить от градусного измерения к радианному и обратно. При этом используют следующие формулы:

$$\alpha_{ðàä} = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0}.$$

$$\alpha^0 = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^0}$$

Пример. Найти радианную меру угла в 72^0.

Решение. Так как $1рад = \frac{180^0}{\pi}$, то

$$72^0 = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}.$$

Ответ: $72^0 = \frac{2\pi}{5}$

Пример. Найти градусную меру угла $\frac{2\pi}{3}$.

Решение. Так как радианная и градусная меры связаны зависимостью 180° = π радиан, тогда получаем $\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180}{3} = 120^0$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} = 120^0$.

Для того чтобы лучше разобраться в связи между рад и градусной мерой обратимся к тригонометрическому кругу (см. рис 1.)

Луч единичной окружности можно вращать в двух направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки. При движении луча против часовой стрелки угол считается положительным, а при движении этого луча по часовой стрелке – отрицательным.

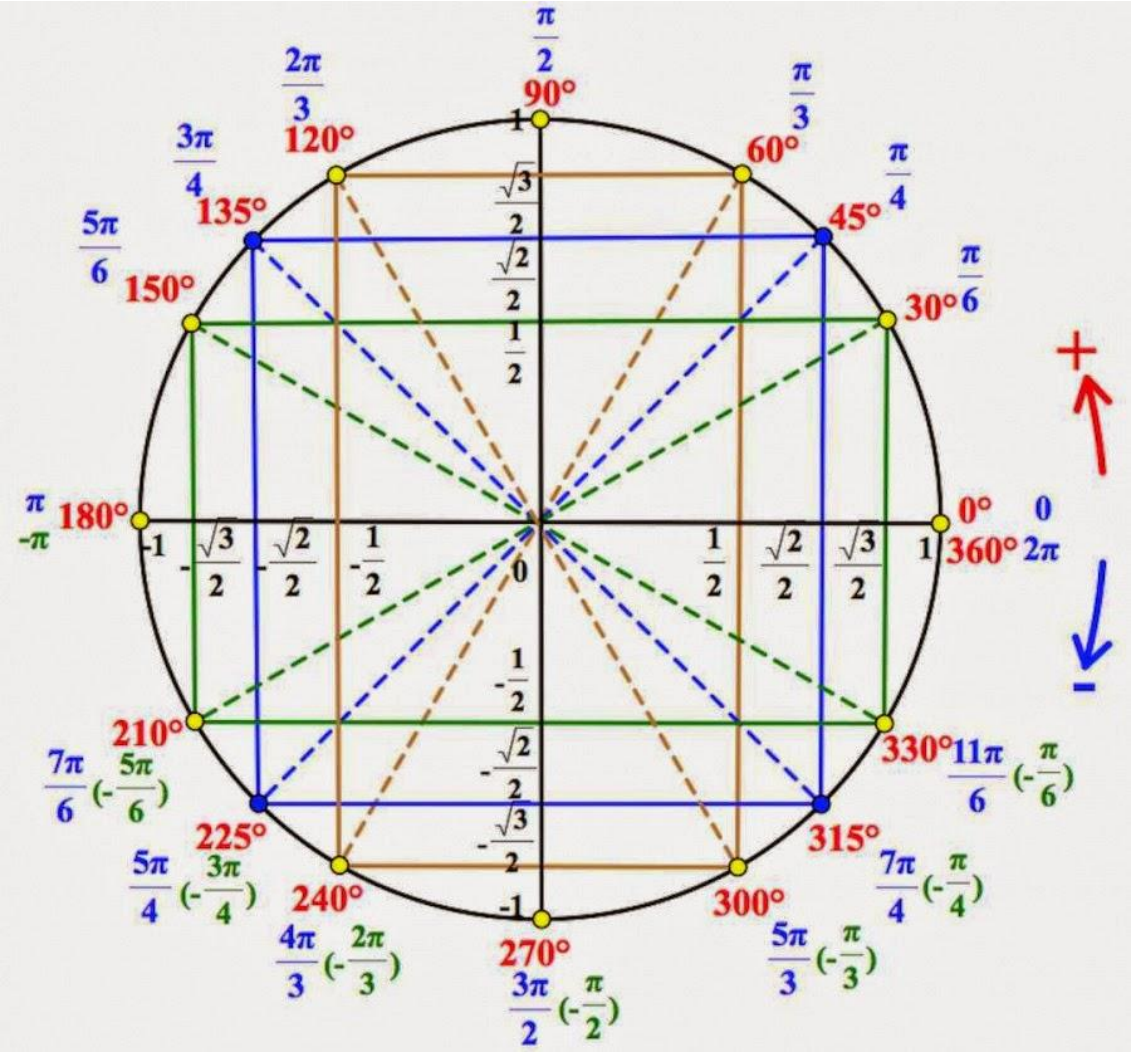
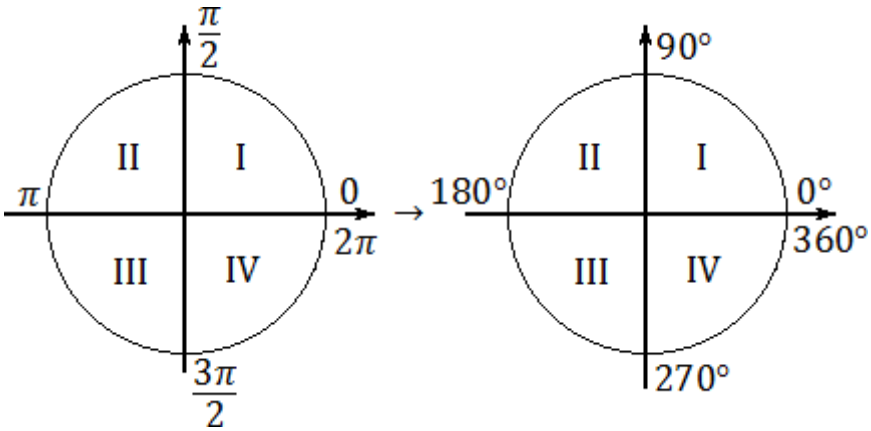


Рис. 1

С тригонометрическим кругом связано расположение четвертей.



В радианах

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ – *I четверть*

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ – *II четверть*

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ – *III четверть*

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ – *IV четверть*

В градусах

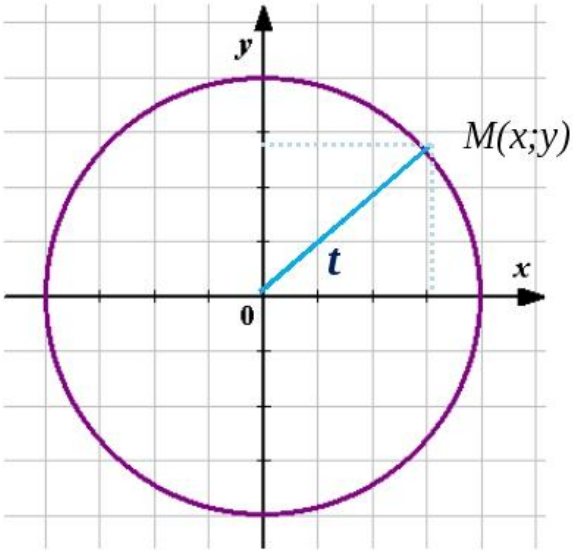
$0 < \alpha < 90^0$ – *I четверть*

$90^0 < \alpha < 180^0$ – *II четверть*

$180^0 < \alpha < 270^0$ – *III четверть*

$270^0 < \alpha < 360^0$ – *IV четверть*

Определение тригонометрических функций



$\sin x = y$ (ордината)

$\cos x = x$ (абсцисса)

$tgx = \frac{y}{x}$

$ctgx = \frac{x}{y}$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

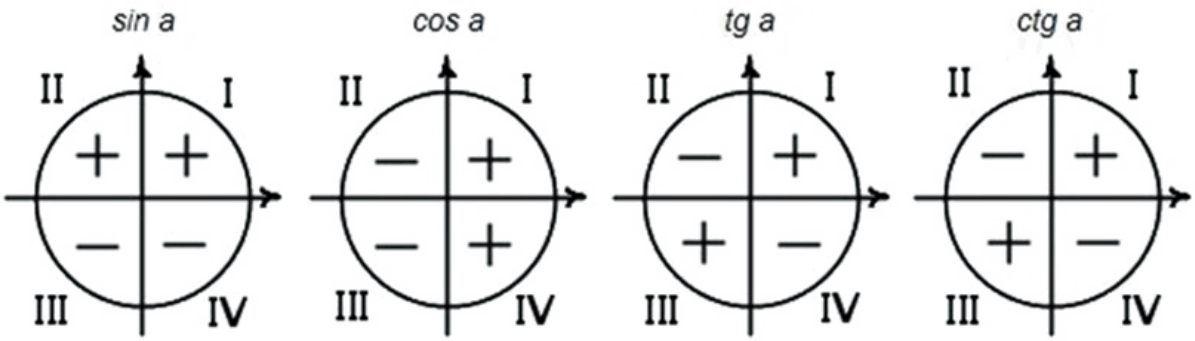


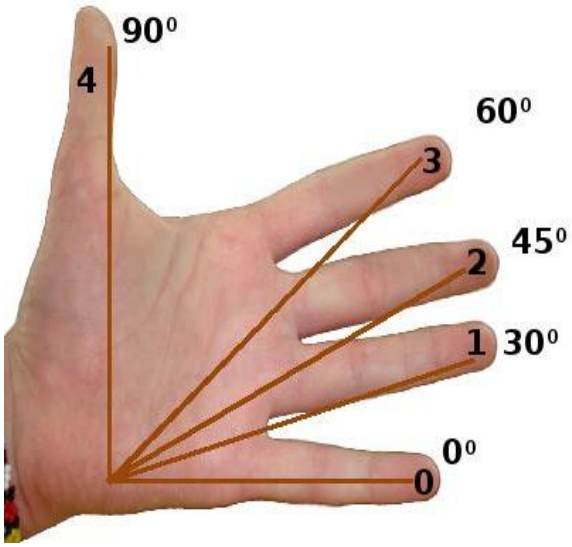
Таблица значений тригонометрических функций

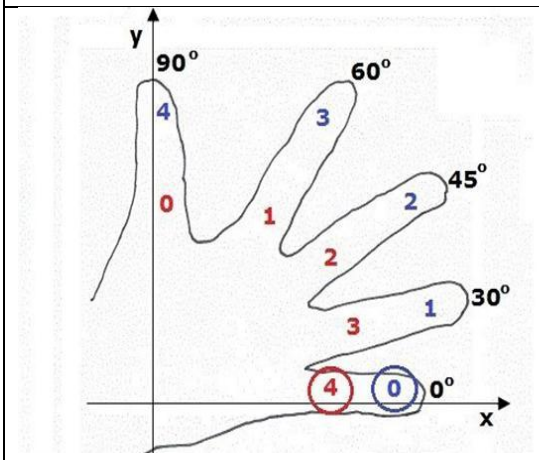
α - радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α - градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Правило пользования таблицей значений тригонометрических функций.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Мнемоническое правило запоминания значений тригонометрических функций





$$\sin 30^0 = \frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

N – номер пальца считая от мизинца

$$\cos 45^0 = \frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

N – номер пальца считая от большого

Очень часто, а особенно при написании контрольной работы по тригонометрии, при сдаче ЕГЭ, требуется знать наизусть значения синуса, косинуса, тангенса для углов 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0.

Но если вдруг, какое либо значение забудется, то можно воспользоваться правилом руки.

Правило. Если провести линии через мизинец и большой палец, то они пересекутся в точке, называемой «лунный бугор».

Образуется угол 90^0. Линия мизинца образует угол 0^0.

Проведя лучи из «лунного бугра» через безымянный, средний, указательный пальцы, получаем углы соответственно 30^0, 45^0, 60^0.

Подставляя вместо n: 0, 1, 2, 3, 4, получаем значения $\sin$, для углов 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0.

Для cos отчет происходит в обратном порядке.

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x=1-\cos^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

   $\cos^2 x=1-\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

2. $tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1,$

3. $tg\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4. $tgx=\dfrac{1}{ctg\,\alpha},$

5. $ctg\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6. $ctgx=\dfrac{1}{tg\,\alpha},$

7. $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \Rightarrow \quad \cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$

8. $1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \Rightarrow \quad \sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2 x}}$

Формулы приведения

Формулы приведения позволяют упростить вычисления, ***привести*** сложные аргументы тригонометрических функций к аргументам I четверти.

Правило применения формул приведения.

1. Знак правой части определяется знаком левой части, считая $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Если приводимая функция имеет аргумент $\pi\pm\alpha,\ 2\pi\pm\alpha,$ то название приводимой функции сохраняется.
3. Если приводимая функция имеет аргумент $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha,$ то название приводимой функции меняется синус на косинус, тангенс на котангенс и обратно.

α - радианы	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
α - градусы	$180^0+\alpha$	$180^0-\alpha$	$360^0+\alpha$	$360^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$90^0-\alpha$	$270^0+\alpha$	$270^0-\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$

Мнемоническое правило для формул приведения

1. Задаем себе вопрос: **«Меняется ли название функции на кофункцию?»** (то есть синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и котангенс на тангенс).

Чтобы ответить на этот вопрос нужно, – подвигать головой вдоль оси, на которой располагается ключевая точка. Ключевые точки всегда располагаются здесь (см. рис.2):

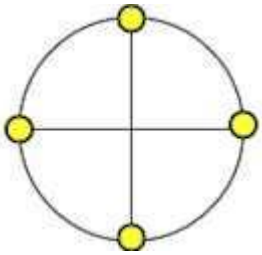


Рис. 2

Например, в формулах $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $tg(\pi-\alpha)$, – ключевые точки – это $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, π..

Так вот, если вы движете головой вдоль горизонтальной прямой, потому что ключевая точка располагается на ней, то вы, как бы, **отвечаете «нет»** на вопрос «Меняется ли название функции на кофункцию?»

Если вы киваете головой вдоль вертикальной прямой, потому что ключевая точка располагается на ней, то вы **отвечаете «да»** на вопрос «Меняется ли название функции на кофункцию?».

2. Ставим справа, на выходе, тот знак, какой несет в себе **левая, исходная, часть.**

Данное правило еще называется «лошадиным».

Формулы сложения

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}.$$

Формулы двойного угла

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$
3. $tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha},$
4. $ctg\,2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\,\alpha}$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}, \quad tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

$$ctgx + ctgy = \frac{\sin(y+x)}{\sin x\cdot\sin y}, \quad ctgx - ctgy = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\cdot\sin y}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

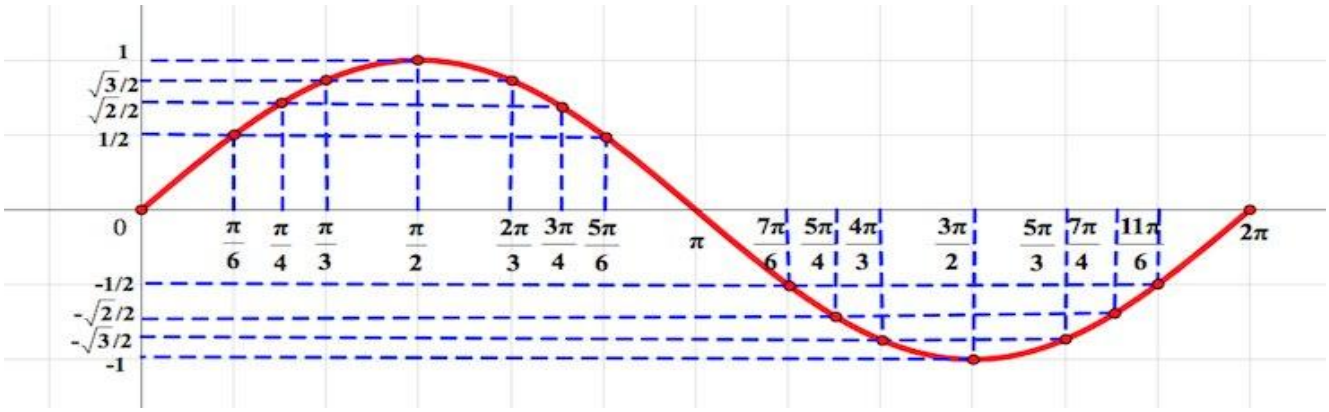
$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

Графики тригонометрических функций.

Если вы умеете работать с таблицей значений или тригонометрическим кругом, то вам не составит труда построить график функции $y = \sin x$.

Переносим все основные значения углов, представленные на круге или в таблице, и соответствующие им значения синуса на координатную плоскость.

По оси абсцисс откладываем угол в радианах, по оси ординат — значения синуса угла.



Вот так выглядит график функции $y = \sin x$. (см. рис.3)

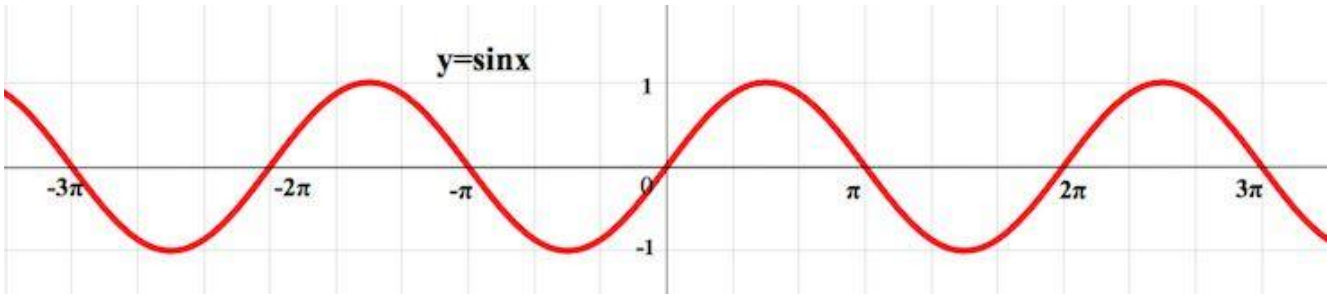


Рис. 3

График $y = \sin x$ симметричен относительно начала координат.

Точно также, мы строим график $y = \cos x$ при помощи тригонометрического круга (см. рис.4).

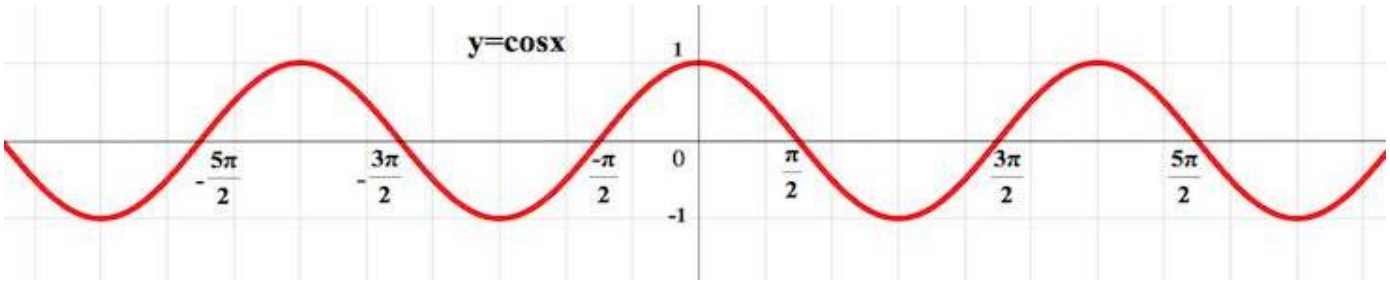


Рис. 4

График $y = \cos x$ симметричен относительно оси ординат.

Построим график функции $y = tgx$.

Нанесенные на координатную плоскость точки рисуют нам плавную кривую. Это и есть график функции $y = tgx$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$(см. рис.5).

Обратите внимание! Тангенс в точках $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ не существует. Мы лишь можем сколь угодно близко «подбираться» к этим значениям.

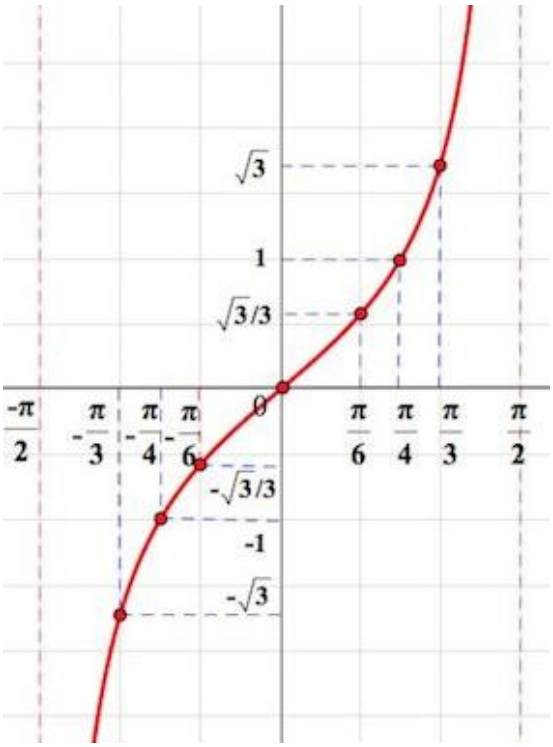


Рис. 5

Вот так выглядит график функции $y = tgx$.

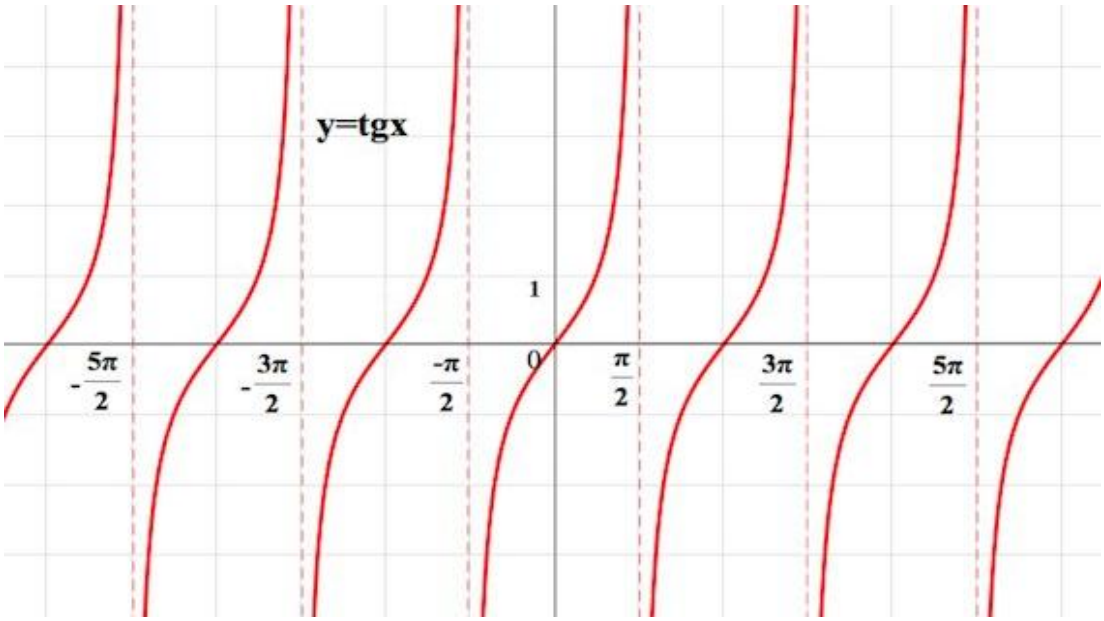


График функции является симметричным относительно начала координат.

Преобразование графиков тригонометрических функций

Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
	Параллельный перенос вдоль оси OY на A единиц вверх, если A>0, и на |A| единиц вниз, если A<0.
	Параллельный перенос вдоль оси OX на *a* единиц вправо, если *a* > 0, на |*a*| единиц влево, если *a* < 0.
	Растяжение вдоль оси OY относительно оси OX в *k* раз, если k > 1, и сжатие в 1/*k* раз, если 0 < k < 1.
	Сжатие вдоль оси OX относительно оси OY в *k* раз, если k > 1, и растяжение в 1/*k* раз, если 0 < k < 1.
	Симметричное отражение относительно оси OX.

Примеры преобразований.

Пример. Построить график функции $y = \cos x - 3$.

Решение. Последовательность построения графика:

1. Строим график функции $y = \cos x$;
2. Графика функции $y = \cos x$ опускаем на 3 единицы вниз вдоль оси ординат, получаем график функции $y = \cos x - 3$ (см. рис.6).

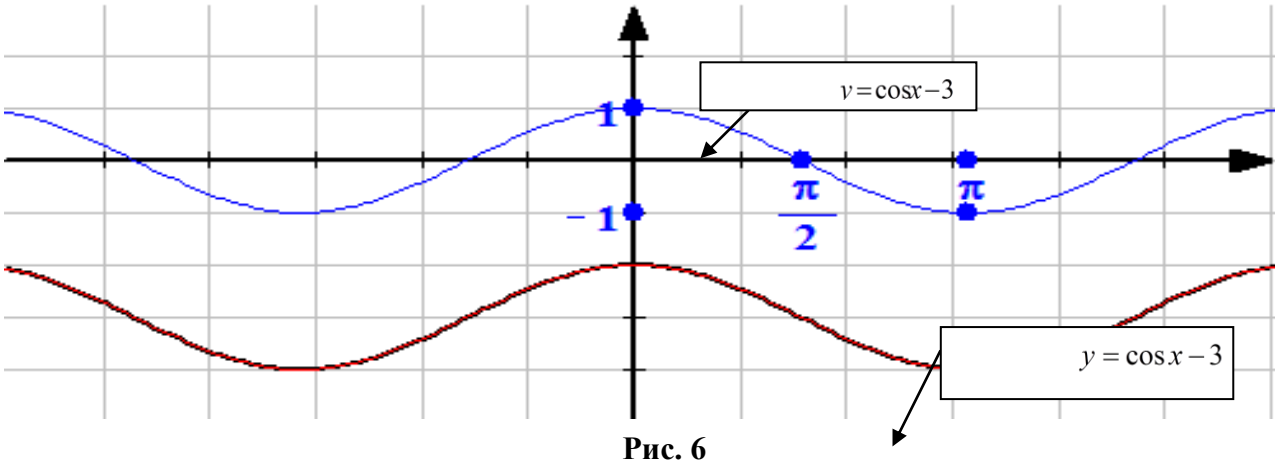


Рис. 6

Пример. Построить график функции $y = 0{,}5\cos x$.

Решение. Последовательность построения графика:

1. Строим график функции $y = \cos x - 3$;
2. Графика функции $y = \cos x$ сжимаем в 2 раза вниз вдоль оси ординат, получаем график функции $y = 0{,}5\cos x$ (см. рис.7).

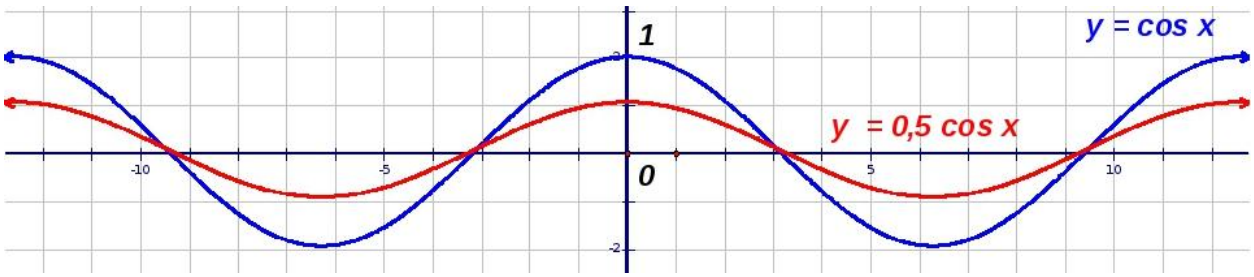


Рис. 7

Пример. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Последовательность построения графика:

1. Строим график функции $y = \sin x$;
2. Графика функции $y = \sin x$ сдвигаем вдоль ось абсцисс на $\frac{\pi}{6}$ вправо, получаем график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ (см. рис.8).

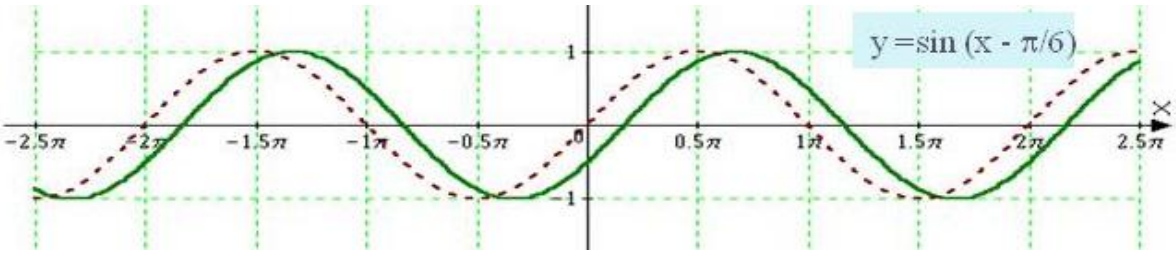


Рис. 8

Пример. Построить график функции $y = -\sin x$.

Решение. Последовательность построения графика:

1. Строим график функции $y = \sin x$;
2. Графика функции $y = \sin x$ симметрично отражаем относительно оси OX, получаем график функции $y = -\sin x$ (см. рис.9).

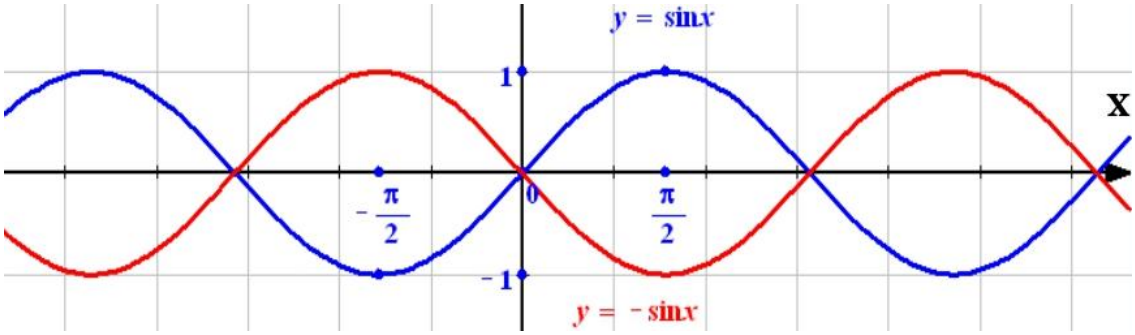


Рис. 9

Немного из истории

Синус *sin*

Длительную историю имеет понятие синус. Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу, и тригонометрические функции) встречаются уже в III веке до н.э. в работах великих математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского. В римский период эти отношения достаточно систематично исследовались Менелаем (I век н.э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус, например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол, или как хорда удвоенной дуги.

В IV-V веках появился уже специальный термин в трудах по астрономии великого индийского учёного Ариабхаты, именем которого назван первый индийский спутник Земли. Отрезок AM он назвал ардхаджива (ардха – половина, джива – тетива лука, которую напоминает хорда). Позднее появилось более краткое название джива. Арабскими математиками в IX веке это слово было заменено на арабское слово джайб (выпуклость). При переводе арабских математических текстов в веке оно было заменено латинским синус (sinus – изгиб, кривизна).

Косинус *cos*

Слово косинус намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения completely sinus, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”).

Тангенс *tg*

Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс) введен в X веке арабским математиком Абу-ль-Вафой, который составил и первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты лишь в XIV веке немецким математиком, астрономом Регимонтаном (1467 г.). Он доказал теорему тангенсов. Региомонтан составил также подробные тригонометрические таблицы; благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе

Название «тангенс», происходящее от латинского tanger (касаться), появилось в 1583 г. Tangens переводится как «касающийся» (линия тангенсов – касательная к единичной окружности).

Обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции (*аркфункции*) — математические функции, являющиеся обратными к тригонометрическим функциям.

$\arcsin a = b,\ b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos a = b,\ b \in [0; \pi]$

$arctga = b,\ b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$arcctga = b,\ b \in (0; \pi)$

Четность обратных тригонометрических функций:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$,

$arctg(-a) = -arctga$,

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ или по таблице значений,

$arcctg(-a) = \pi - arcctga$ или по таблице значений.

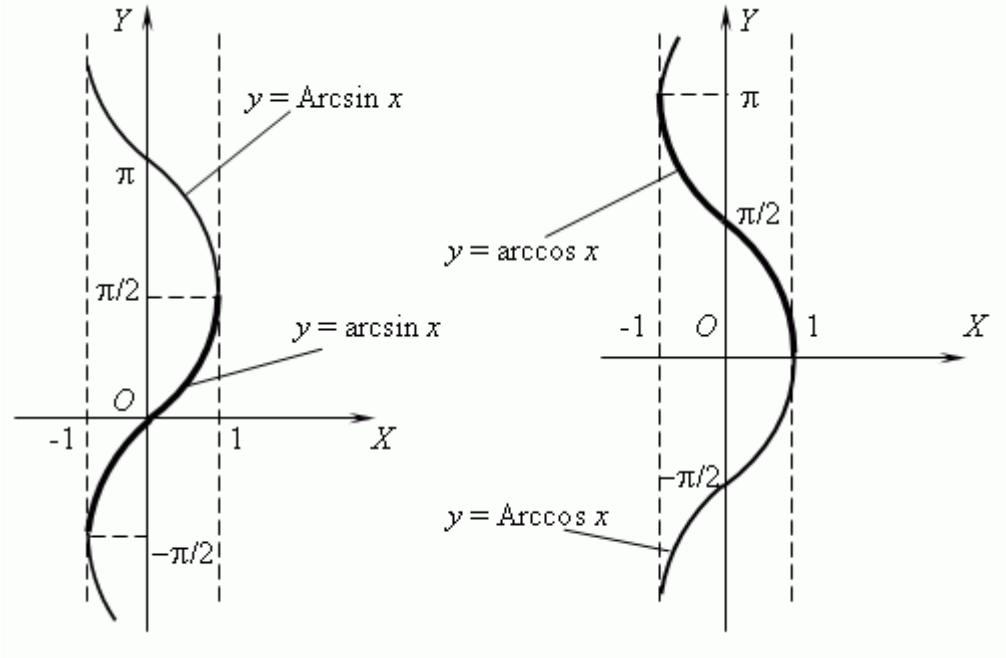
Пример. Вычислить 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *и* $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *и* $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$.

Ответ: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

Графики обратных тригонометрических функций.



Решение простейших тригонометрических уравнений

Вид уравнения	$a>0$	$a<0$	Частный случай
$\cos x = a$ $-1 \le a \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$		$\cos x = 1$ $x = 2\pi n,\ n \in Z$ $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$ $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$
$\sin x = a$ $-1 \le a \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$	$x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$	$\sin x = 1,$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z.$ $\sin x = -1,$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z.$ $\sin x = 0,$ $x = \pi n,\quad n \in Z.$
$tg\, x = a$	$x = arctga + \pi n,\quad n \in Z$	$x = -arctga + \pi n,\quad n \in Z$	$tgx = 0$ $x = \pi n,\quad n \in Z$
$ctg\, x = a$	$x = arcctga + \pi n,\quad n \in Z.$		$ctgx = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in Z$

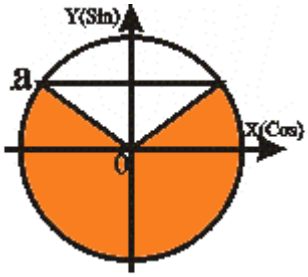
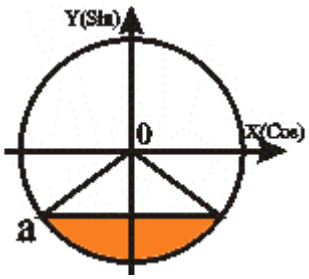
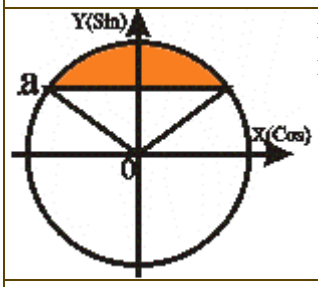
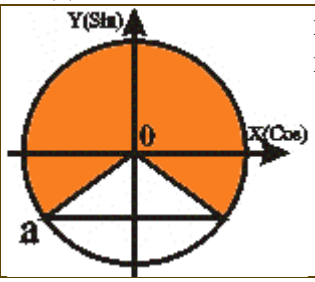
Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

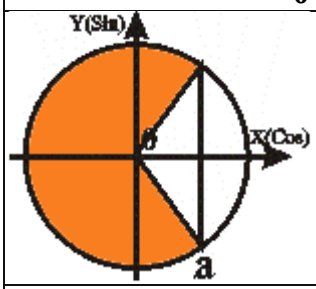
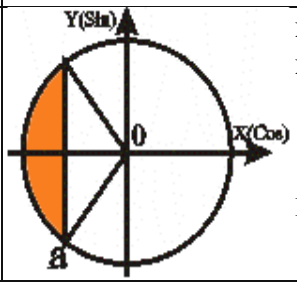
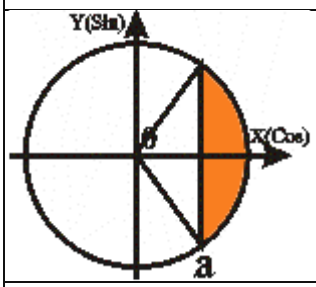
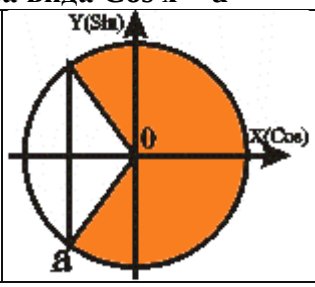
Решение. $\sin x = \frac{1}{2}$

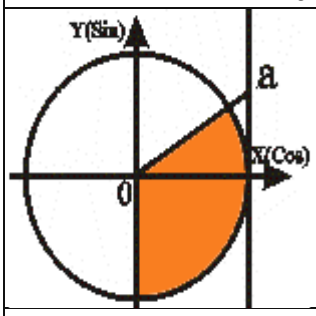
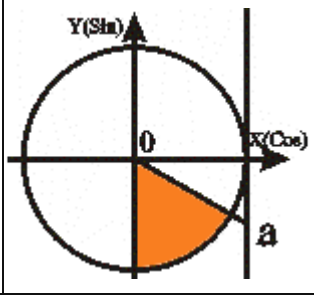
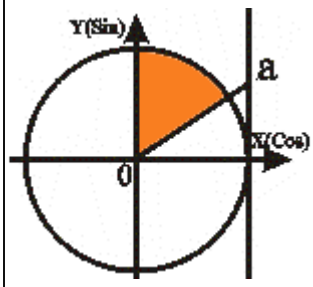
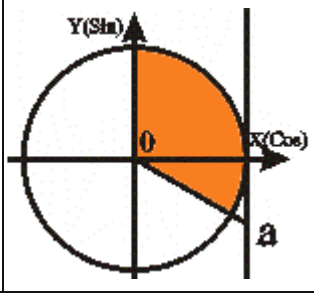
$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ m.e.\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad n \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$

Тригонометрические неравенства

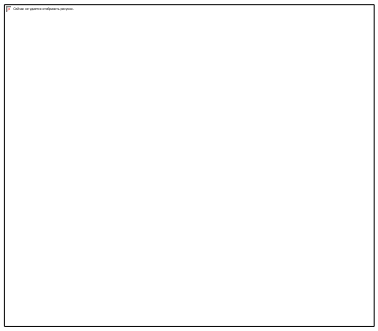
Неравенства вида Sin x < a	
0<a<1	**-1<a<0**
 x_1 = arcSin a x_2 = - П - arcSin a $x_2 < x < x_1$ -П- arcSina<x<arcSina	 x_1 = - arcSin a x_2 = - П + arcSin a $x_2 < x < x_1$ -П+arcSin a<x<-arcSin a
Учитывая, что arcSin(-|a|) = - arcSin |a| и периодичность функции получаем для любого |a|≤1 решение: **-П-arcSin a + 2Пn < *x* < arcSin a + 2Пn, n□Z.**	
Неравенства вида Sin *x* ≥ a	
 x_1 = arcSin a x_2 = П - arcSin a $x_1 \le x \le x_2$	 x_1 = - arcSin a x_2 = П + arcSin a $x_1 \le x \le x_2$
Аналогично объединяем два решения: **arcSin a + 2Пn ≤ x ≤ П - arcSin a +2Пn, n□Z.**	

Неравенства вида Cos x≤ a	
0<a<1	**-1<a<0**
 x_1 = arcCos a x_2 = 2П - arcCos a $x_1 \le x \le x_2$ arcCosa≤x≤2П-arcCosa	 x_1 = П - arcCos a x_2 = П + arcCos a $x_1 \le x \le x_2$ П-arcCosa≤x≤П+arcCosa
Учитывая, что arcCos(-|a|) = П - arcCos |a| и периодичность функции получаем для любого |a|≤1 решение: **arcCos a + 2Пn ≤ x ≤ 2П - arcCos a + 2Пn, n□Z.**	
Неравенства вида Cos x > a	
 x_1 = arcCos a x_2 = - arcCos a $x_2 < x <x$	 x_1 = П - arcCos a x_2 = - П + arcCos a $x_2 < x < x_1$
Аналогично объединяем два решения: **- arcCos a + 2Пn < x < П - arcCos a +2Пn, n□Z.**	

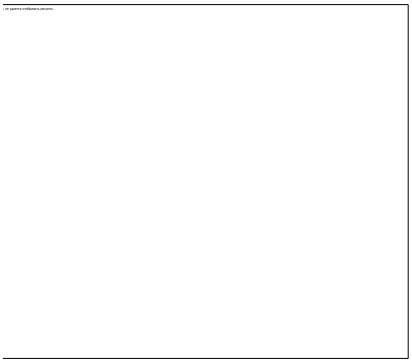
Неравенства вида tg x < a	
0<a<1	**-1<a<0**
 x_1 = arctg a x_2 = - П/2 $x_2 < x < x_1$ -П/2 < x < arctg a	 x_1 = - arctg a x_2 = - П/2 $x_2 < x < x_1$ -П/2 <x < -arctg a
Учитывая, что arctg(-|a|) = - arctg |a| и периодичность функции получаем решение: **-П/2 + Пn < x < arctg a + Пn, n□Z.**	
Неравенства вида tgx ≥ a	
 x_1 = arctg a x_2 = П/2 $x_1 \le x < x_2$	 x_1 = - arctg a x_2 = П/2 $x_1 \le x < x_2$
Аналогично объединяем два решения: **arctg a + Пn ≤ x < П/2 +Пn, n□Z.**	

Пример. Решим тригонометрическое неравенство $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Решать данное тригонометрическое уравнение будем пошагово.



Шаг 1. Начертим единичную окружность, отметим на оси ординат точку $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и проведем через нее прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечет единичную окружность в двух точках. Каждая из этих точек изображает числа, синус которых равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Шаг 2. Эта прямая разделила окружность на две дуги. Выделим ту из них, на которой изображаются числа, имеющие синус больший, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Естественно, эта дуга расположена выше проведенной прямой.

Шаг 3.Выберем один из концов отмеченной дуги. Запишем одно из чисел, которое изображается этой точкой единичной окружности.

Шаг 4. Для того чтобы выбрать число, соответствующее второму концу выделенной дуги, "пройдем" по этой дуге из названного конца к другому. При этом напомним, что при движении против часовой стрелки числа, которые мы будем проходить, увеличиваются (при движении в противоположном направлении числа уменьшались бы). Запишем число, которое изображается на единичной окружности вторым концом отмеченной дуги.

Таким образом, мы видим, что неравенству $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ удовлетворяют числа, для которых справедливо неравенство $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. Мы решили неравенство для чисел, расположенных на одном периоде функции синус.

Все решения неравенства могут быть записаны в виде $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Глава 2. Показательная функция

a^x – степень.
a – основание степени
x – показатель степени

Определение. ***<u>Функция</u>*** вида $y = a^x$, где $a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in R$ называется ***<u>показательной функцией</u>***.

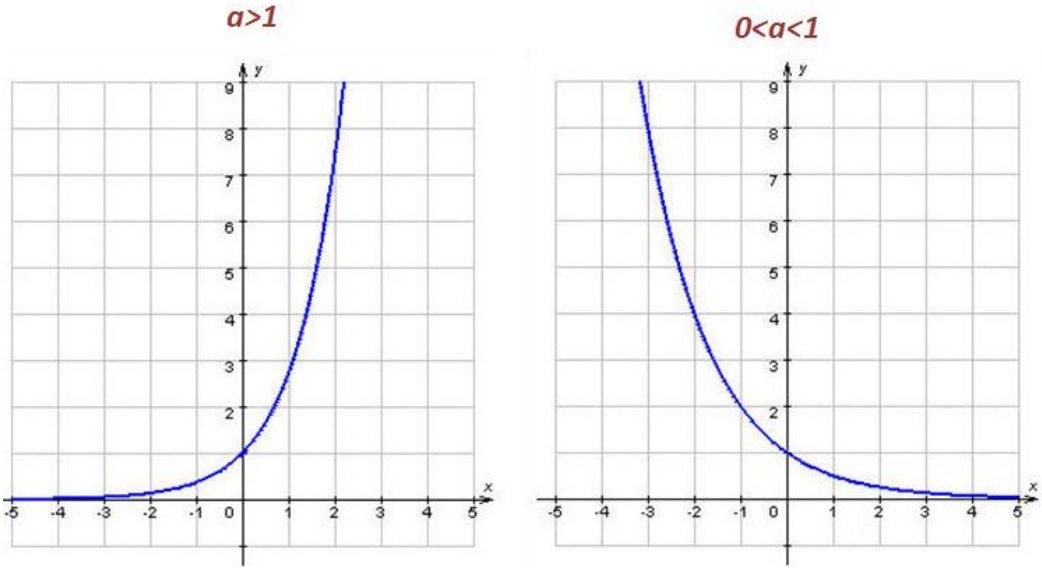


Рис.10

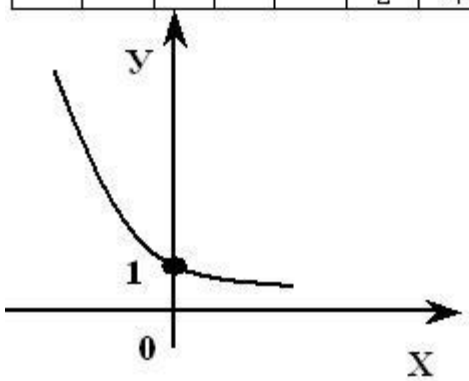
Свойства показательной функции

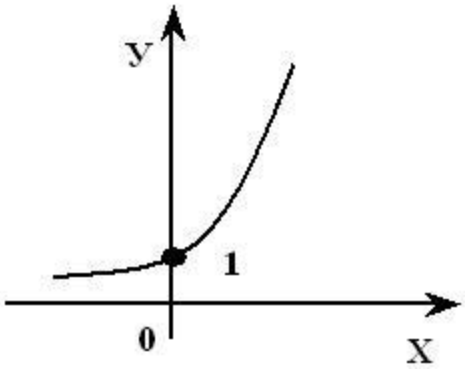
1. Областью определения показательной функции – все действительные числа.
2. Область значений показательной функции будет являться множество всех положительных действительных числе чисел. Иногда это множество для краткости записи обозначают как R+ или в виде интервала $(0; \infty)$.
3. Если в показательной функции основание:
   - $a > 1$, то функция будет возрастающей на всей области определения (см. рис.10)

     $0 < a < 1$, то функция будет убывающей на всей области определения (см. рис.10)
4. График показательной функции всегда проходит через точку с координатами (0;1).
5. Показательная функция не имеет точек экстремума, то есть другими словами, она не имеет точек минимума и максимума функции. Если рассматривать функцию на каком-либо конкретном отрезке, то минимальное и максимальное значения функция будет принимать на концах этого промежутка.
6. Функция не является четной или нечетной. Показательная функция это функция общего вида. Это видно и из графиков, ни один из них не симметричен ни относительно оси Оу, ни относительно начала координат.

Пример. Построить графики функций $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *и* $y=2^x$.

Решение. Для построения графиков этих функций заполним таблицу зависимости.

<table>
<tr><td>$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$</td><td>$y=2^x$</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>8</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
</table>


</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr>
</table>


</td></tr>
</table>

Свойства степени

1. $a^0=1$
2. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ - произведение степеней
3. $a^m:a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ - частное степеней
4. $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$ - степень в степени
5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$
6. $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ - степень произведения
7. $\left(a^m b^p\right)^n=a^{mn}\cdot b^{pn}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ - степень частного

Свойства степени с отрицательным показателем

9. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$
10. $\frac{1}{a^{-n}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=a^n$
11. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

Пример. Вычислить $0{,}5^0\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}(0{,}36)^{-0{,}5}(0{,}1)^{-2}$.

Решение. Решаем по действиям:

1) $0{,}5^0=1$;

2) $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}=\left(\frac{6}{5}\right)^{1}=\frac{6}{5}$;

3) $(0{,}36)^{-0{,}5}=\left[(0{,}6)^2\right]^{-0{,}5}=(0{,}6)^{-1}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$;

4) $(0{,}1)^{-2}=\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}=10^2=100$.

Подставив данные значения, получим $1\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot 100=200$.

Ответ: 200.

Свойства корня

1. $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$;
2. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
4. $\sqrt[n]{a^n}=a$;
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$;
6. $\sqrt[n\cdot m]{a^n}=\sqrt[m]{a}$.

Пример. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{3^7\cdot 4^5}\cdot\sqrt[6]{3^5\cdot 4}$.

Решение. $\sqrt[6]{3^7\cdot 4^5}\cdot\sqrt[6]{3^5\cdot 4}=\sqrt[6]{3^{12}\cdot 4^6}=3^{\frac{12}{6}}\cdot 3^{\frac{6}{6}}=3^2\cdot 4=36$.

Ответ: 36.

Степени чисел от 1 до 10

$2^1=2$ $2^2=4$ $2^3=8$ $2^4=16$ $2^5=32$ $2^6=64$ $2^7=128$ $2^8=256$ $2^9=512$ $2^{10}=1024$	$3^1=3$ $3^2=9$ $3^3=27$ $3^4=81$ $3^5=243$ $3^6=729$ $3^7=2187$ $3^8=6561$ $3^9=19683$ $3^{10}=59049$	$4^1=4$ $4^2=16$ $4^3=64$ $4^4=256$ $4^5=1024$ $4^6=4096$ $4^7=16384$ $4^8=65536$ $4^9=262144$ $4^{10}=1048579$	$5^1=5$ $5^2=25$ $5^3=125$ $5^4=625$ $5^5=3125$ $5^6=15625$ $5^7=78125$ $5^8=390625$ $5^9=1953125$ $5^{10}=9765625$	$6^1=6$ $6^2=36$ $6^3=216$ $6^4=1296$ $6^5=7776$ $6^6=46656$ $6^7=279936$ $6^8=1679616$ $6^9=10077696$ $6^{10}=60466176$
$7^1=7$ $7^2=49$ $7^3=343$ $7^4=2401$ $7^5=16807$ $7^6=117649$ $7^7=823543$ $7^8=5764801$ $7^9=40353607$ $7^{10}=282475249$	$8^1=8$ $8^2=64$ $8^3=512$ $8^4=4096$ $8^5=32768$ $8^6=262144$ $8^7=2097152$ $8^8=16777216$ $8^9=134217728$ $8^{10}=1073741824$	$9^1=9$ $9^2=81$ $9^3=729$ $9^4=6561$ $9^5=59049$ $9^6=531441$ $9^7=4782969$ $9^8=43046721$ $9^9=387420489$ $9^{10}=3486784401$	$10^1=10$ $10^2=100$ $10^3=1000$ $10^4=10000$ $10^5=100000$ $10^6=1000000$ $10^7=10000000$ $10^8=100000000$ $10^9=1000000000$ $10^{10}=10000000000$	

Таблица квадратов от 1 до 100

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

MyShared

Гава 3. Логарифмическая функция

Логарифмы и их свойства широко применяются в математике для решения разного рода задач.

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени x, в которую надо возвести a, чтобы получить b, где $a > 0, a \neq 1, b > 0.$.

$$\log_a b = x \Rightarrow b = a^x$$

Определением логарифма можно записать так:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство справедливо при $b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$. Эго обычно называют *основным логарифмическим тождеством.*

Обозначение $\log_a b$ читается как *логарифм b по основанию a.*

a – основание логарифма

в – подлогарифмическое выражение

x – показатель степени

Пример. $\log_2 8 = 3 \quad \Rightarrow \quad 8 = 2^3$**.**

В математике чаще всего используют два основания логарифма: 10 и е= 2,71828182845..., математическая постоянная (экспонента). В случае, когда применяется основание 10, логарифм меняет форму записи: $\log_{10} x = \lg x$ и называется **десятичный логарифм.**

Пример. Вычислить $\lg 1000$.

Решение. Для вычисления воспользуемся определением логарифма.

$\lg 1000 = \log_{10} 1000 = 3.$

Ответ: $\lg 1000 = 3.$

Пример. Вычислить $\log_{64} 128$.

Решение. Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так как $64 = 2^6, 128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда 6x = *7*, $x = \frac{7}{6}$.

Ответ: $\log_{64} 128 = \frac{7}{6}$

Когда применяется основание e=2,71828182845..., логарифм меняет форму записи: $\log_e x = \ln x$ и называется **натуральный логарифм.**

Пример. Вычислить $\ln e^{13}$.

Решение. Для вычисления воспользуемся определением логарифма.

$\ln e^{13} = \log_e e^{13} = 13.$

Ответ: $\ln e^{13} = 13.$

Для вычисления логарифмов применяется не только определение логарифмов, но и свойства логарифмов. Приведем эти свойства.

Свойства логарифмов

Пусть $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0,$ r – любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

1. $\log_a 1 = 0,$
2. $\log_a a = 1,$
3. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c,$
4. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c,$
5. $\log_a b^r = r \log_a b.$
6. $\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \cdot \log_a b$
7. $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ – *формула перехода к основанию* b $(b > 0, b \neq 1)$
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
9. $c = \log_a a^c$ – *запись числа через логарифм*
10. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), (f(x) > 0, g(x) > 0)$ – *îïåðàöèÿ ïîòåíöèðîâ àíèÿ*
11. $\log_c b \cdot \log_d a = \log_c a \cdot \log_d b$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0,\ c \neq 1,\ d \neq 1).$
12. $\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_d b}{\log_d a}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1,\ d \neq 1).$

Пример.

Простейшие логарифмические неравенства

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$f(x) > g(x)$, ОДЗ $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$	$f(x) < g(x)$, ОДЗ $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Пример. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2$.

Решение. Число -2 равно $\log_{\frac{1}{3}} 9$. Поэтому данное неравенство можно переписать в виде $\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{3}$ убывает на $(0; +\infty)$, так как $\frac{1}{3} < 1$.

Следовательно, неравенству удовлетворяют такие числа *x*, для которых выполнено условие

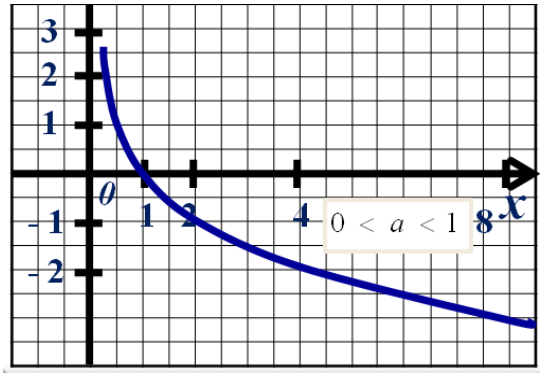
$$\begin{cases} 5-2x > 0 \\ 5-2x < 9 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 2{,}5$$

Итак, множество решений данного неравенства есть интервал $(-2;\ 2{,}5)$.

Ответ: $x \in (-2;\ 2{,}5)$.

Логарифмическая функция

Определение. Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1, x > 0$.



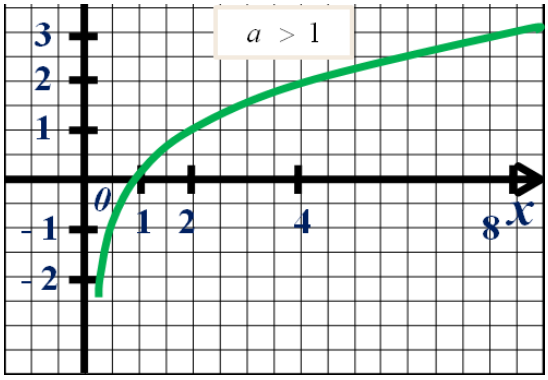


Рис. 11

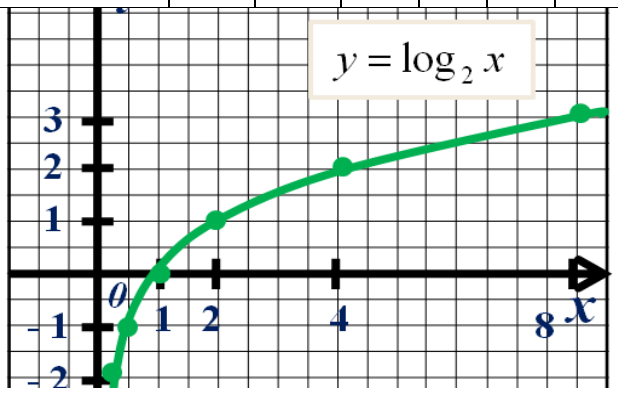
1. Область определения (D(f)) – множество всех положительных чисел R+.
2. Область значения (E(f)) - множество всех действительных чисел R.
3. Функция является ни четной, ни нечетной
4. При всех значениях а график функции пересекает ось абсцисс в точке с координатой (1; 0).
5. Если основание логарифмической функции a>1, то на всей области определения функции возрастает (см. рис.11 слева).
6. Если основание логарифмической функции $0 < a < 1$, то на всей области определения функции убывает (см. рис. 11 справа).
7. Логарифмическая функция не имеет экстремумов.

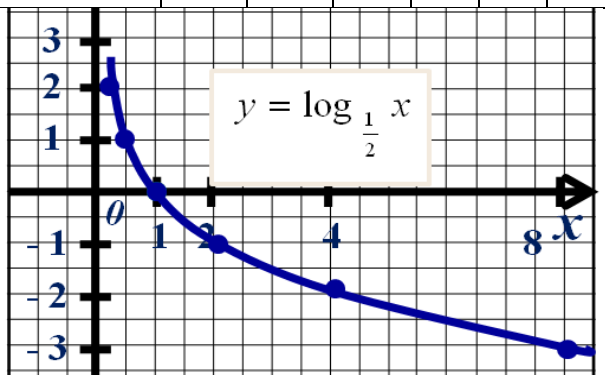
Пример. Построить графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решение. Для построения графиков этих функций заполним таблицу зависимости.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3



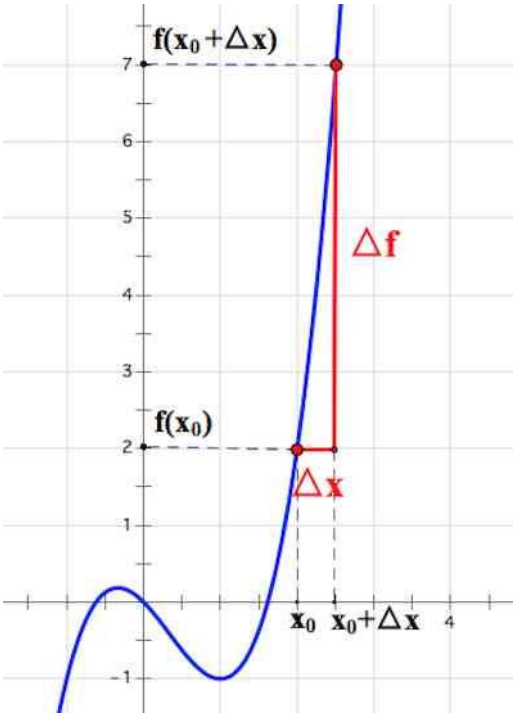


Раздел 4. Производная функции

Определение. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношений приращения функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращение аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует. Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Производную функции $y = f(x), x \in (a;b)$, в точке x обозначают $f'(x)$ («эф штрих от икс»), y'_x («игрек штрих по икс»), $\frac{df}{dx}$ («де эф по де икс»), $\frac{dy}{dx}$ («де игрек по де икс»), причем все эти обозначения равноправны.



Но нет необходимости каждый раз пользоваться этим определением для нахождения производной…

Работу нам упростит таблица производных и основные правила дифференцирования.

Основные правила дифференцирования

1. $C' = 0$, C – постоянная
2. $(Cu)' = C \cdot u'$, C – число
3. $(u \pm v \mp w...)' = u' \pm v' \mp w'...$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
6. $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$
7. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$

Таблица производных

Основные элементарные функции	Сложные функции
1. $x' = 1$	1. -
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$,	2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,	3. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$,	6. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$
7. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,	7. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8. $(e^x)' = e^x$,	8. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
9. $(\sin x)' = \cos x$,	9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
10. $(\cos x)' = -\sin x$,	10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
11. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	11. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	12. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Пример. $y = 5x^4 - \frac{2x}{\sqrt{x}} + 3x \cdot \sqrt[3]{x} + 7$

Решение. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$y = 5x^4 - 2xx^{-\frac{1}{2}} + 3xx^{\frac{1}{3}} + 7 = 5x^4 - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{4}{3}} + 7.$$

Находим

$$y' = \left(5x^4 - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{4}{3}} + 7\right)' = 5\left(x^4\right)' - 2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 3\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' + (7)' =$$

$$= 20x^3 - x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{3}} = 20x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{x}.$$

Ответ: $y' = 20x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{x}$.

Пример. Найти производную функции $y = \left(2x^2 + x + 5\right)^4$.

Решение. Применяя теорему о дифференцировании сложной степенной функции, находим

$$\left(\left(2x^2 + x + 5\right)^4\right)' = 4 \cdot \left(2x^2 + x + 5\right)^{4-1} \cdot \left(2x^2 + x + 5\right)' = 4 \cdot \left(2x^2 + x + 5\right)^3 \cdot (4x + 1).$$

Ответ: $y' = \left(2x^2 + x + 5\right)^4 = 4\left(2x^2 + x + 5\right)^3 \cdot (4x + 1)$

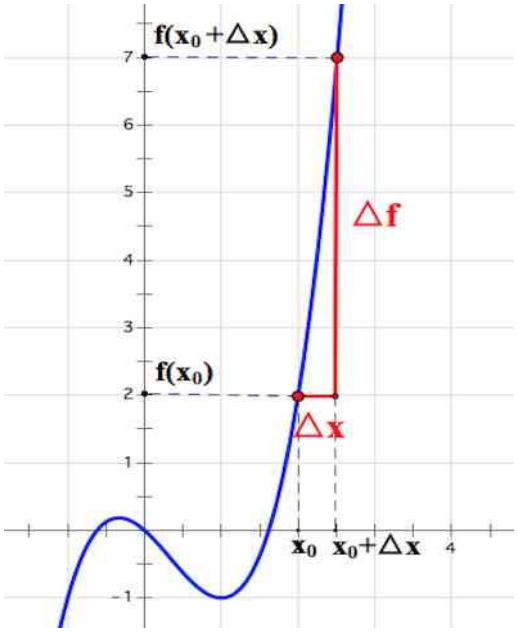
Геометрический смысл производной

Производная в точке x_0 $(f'(x_0))$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке:

$$f'(x_0) = tg\alpha,$$

где α – угол наклона касательной (проведенной к $f(x)$ в точке x_0).

Пример.



Физический смысл производной

Если точка движется вдоль оси x и ее координаты изменяются по закону $s(t)$, то **мгновенная скорость точки будет вычмсляться по формуле**:

$$v(t) = s'(t),$$

а **ускорение**:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Пример. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 6t^2 - 48t + 17$, где $s(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$.

Решение:

$$v(t) = s'(t) = 12t - 48$$

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60\,м/с$$

Ответ: 60 *м/с*.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ **в точке** $x_0 = a$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Правило составления уравнения касательной

Рассмотрим правило на конкретном примере.

Пример. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

1. Найти значение функции в в точке $x_0 = a$	1. Решение. Найдем значений функции $f(x) = x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 1$ $f(x_0) = f(1) = 3$
2. Найдем производную данной функции.	2. $f'(x) = 2x + 1$
3. Найдем значение производной данной функции в точке $x_0 = a$.	3. $f'(x_0) = f'(1) = 3$
4. Подставим полученные значения в формулу ( ).	4. Используя формулу составления уравнения касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (1) (3) Получаем выражение: $y = 3 + 3(x - 1)$
5. Упростить полученное выражение.	5. $y = 3 + 3(x - 1) = 3 + 3x - 3 = 3x$ Итак: уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, имеет вид $y = 3x$

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

Рассмотрим правило на конкретном примере.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на отрезке $[-2;0]$.

1. Найти значение функции на концах отрезка	1. $f(-2) = -1, \quad f(0) = 1$.
2. Найти критические точки	2. Вычислим производную данной функции и найдем критические точки. Так как производная $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$ определена для любого *x*, остается решить уравнение $f'(x) = 0$. Решая его через дискриминант, получаем две критические точки $x = -1, \quad x = 2$.
3. Из критических точек выбираем те, которые принадлежат указанному отрезку.	3. Отрезку $[-2;0]$ принадлежит только $x = -1$.
4. Находим значение функции $f(x)$ в критических точках, принадлежащих указанному отрезку	4. $f(-1) = 4{,}5$,
5. Из полученных значений (п. 1. 4.) выбираем наибольшее и наименьшее	5. $f(x)_{наим} = f(-2) = -1$, $f(x)_{íàèá} = f(-1) = 4{,}5$.
6. Записать ответ	6. Ответ: $f(x)_{íàèì} = -1$, $f(x)_{íàèá} = 4{,}5$.

Раздел 5. Первообразная и интеграл

Раздел 6. Комбинаторика